

## Herleitung der Arbeit im radialsymmetrischen Gravitationsfeld

Soll ein Satellit z. B. von der Erdoberfläche ( $r_1$ ) bis zu einem Punkt in der Höhe ( $r_2$ ) 2000km angehoben werden, so muss Arbeit verrichtet werden. Leider kann man nicht mit der Formel

$W_H = mgh$  arbeiten, weil die Kraft  $F = mg$  nur direkt an der Erdoberfläche als konstant betrachtet werden kann.

Newtons Gravitationsgesetz besagt nämlich, dass sich die Gravitationskraft umgekehrt proportional zum Radius (Abstand vom Erdmittelpunkt) verhält:  $F_G = \gamma \frac{m_s m_E}{r^2}$

Während man den Satelliten von der Erde entfernt ändert sich ständig die Kraft und damit auch die verrichtete Arbeit.

Als ersten Versuch teilen wir deshalb den Weg von der Erdoberfläche bis zum Ziel-Punkt in fünf Abschnitte auf denen wir die Kraft als konstant betrachten:

$$W_{12} = F_1 \Delta s_1 + F_2 \Delta s_2 + F_3 \Delta s_3 + F_4 \Delta s_4 + F_5 \Delta s_5$$

Mathematisch schreibt man dafür einfach:

$$W_{12} = \sum_{i=1}^5 F_i \Delta s_i \quad \text{Das ist eine ungenaue Näherung.}$$

Wie kann die Näherung verbessert werden?

Man erhöht einfach die Anzahl der Abschnitte, wodurch sie immer kleiner werden. Die Grenze ist erreicht, wenn die Abschnitte unendlich klein werden. Es sind dann unendlich viele. Die Kraft ändert sich auf einem unendlich kleinen Abschnitt tatsächlich nicht – sie ist konstant.

$$W_{12} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} F_i \Delta s_i \quad \text{Man muss eine Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Summanden}$$

berechnen.

Die Lösung dieses Problems gelang Newton gleich selbst – er erfand die Integralrechnung:

$$W_{12} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} F_i \Delta s_i = \int_{r_1}^{r_2} F ds \quad (\text{sprich: Integral von } r_1 \text{ bis } r_2 \text{ von } F ds). \quad \text{Das } ds \text{ steht jetzt für}$$

unendlich kleine Abschnitte des Weges. Für das radialsymmetrische Feld ist es günstiger mit  $r$  als mit  $s$  zu arbeiten. Deshalb schreibt man das Integral so:

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F dr \quad \text{In dieses Integral wird nun die genaue Formel für die Kraft eingesetzt:}$$

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{m_s m_E}{r^2} dr \quad \text{Aus diesem Integral kann man alle Faktoren, die nicht von } r \text{ abhängen}$$

herausziehen:  $W_{12} = \gamma m_s m_E \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr$  Für die Lösung des Integrals wird eine Funktion gesucht,

deren Ableitung  $\frac{1}{r^2}$  ist. Die Funktion ist also  $-\frac{1}{r}$ . Damit ergibt sich folgende Lösung:

$$W_{12} = \gamma m_s m_E \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = [\gamma m_s m_E]_{r_1}^{r_2} = \gamma m_s m_E \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Für die Arbeit im radialsymmetrischen Gravitationsfeld gilt:

$$W_{12} = \gamma m_s m_E \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$