Compton-Effekt

Der Compton-Effekt tritt auf,wenn Röntgenstrahlung auf einen Streukörper (z.B. Metall) trifft und von den freien Elektronen im Metallgitter des Streukörpers abgelenkt (gestreut) wird. Es handelt sich dabei um elastische Stöße zwischen Röntgenphotonen und den Elektronen.
Durch den Energieübertrag auf die Elektronen verlieren die Röntgenphotonen Energie, was zu einer Vergrößerung der Wellenlänge der Röntgenstrahlung führt.
Ein großer Teil der Röntgenstrahlung durchläuft den Streukörper ohne Ablenkung und ohne Wellenlängenänderung. Die Wellenlängenänderung hängt nur vom Ablenkwinkel ab.

Bild 1

Dieses Bild fehlt noch!

Herleitung der Formel zum Berechnen der Wellenlängenänderung:

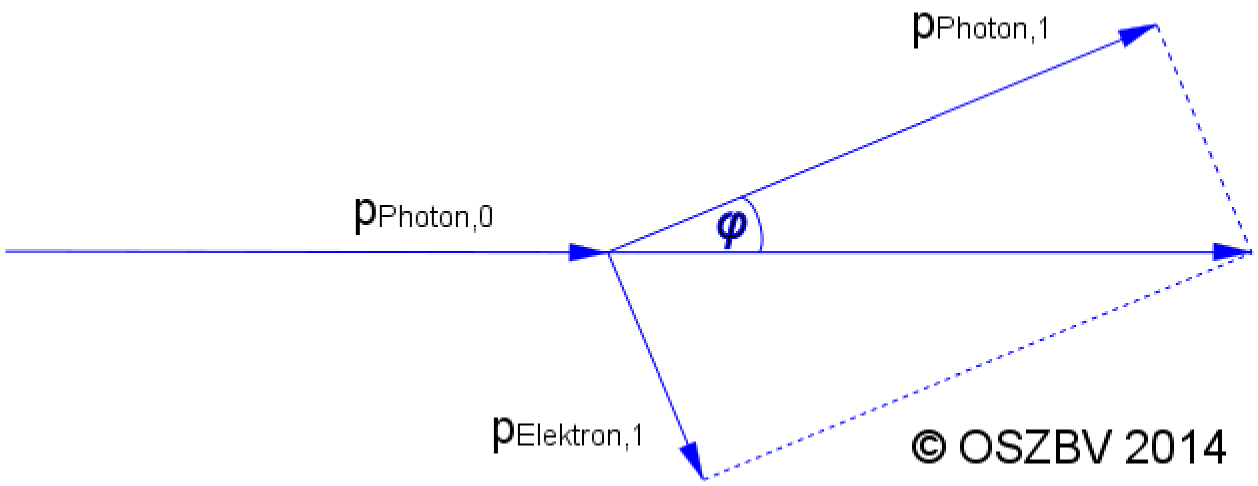
Da die Röntgenphotonen mit Lichtgeschwindigkeit c fliegen, muss bei der Erklärung relativistisch gerechnet werden.
Es gelten der Energieerhaltungssatz:

$$E_{Ph,0}+E_{Elektron,0}=E_{Ph,1}+E_{Elektron,1}$$

und der Impulserhaltungssatz.:

$$p_{Ph,0}+p_{Elektron,0}=p_{Ph,1}+p_{Elektron,1}$$

Bild 2: Impulsbilanz beim Compton-Effekt



Wählt man als Bezugssystem das Elektron vor dem Stoß so vereinfachen sich die Formeln, denn dann besitzt das Elektron keine kinetische Energie und sein Impuls ist null.

Für den Impuls des Elektrons vor dem Stoß gilt:
$p_{Elektron,0}=0$
Für die Energie des Elektrons vor dem Stoß gilt nach Einstein:
$E_{Elektron,0}=m_{e,0}\cdot c^2$ (ohne kinetische Energie)

Außerdem gilt für die Energie des Elektrons nach dem Stoß folgende Beziehung, die aus der speziellen Relativitätstheorie stammt:

$$E^2_{Elektron,1} = (m_{e,0} \cdot c^2)^2 + c^2 \cdot p^2_{Elektron,1} \quad \text{oder:}$$

$$E^2_{Elektron,1} - c^2 \cdot p^2_{Elektron,1} = (m_{e,0} \cdot c^2)^2$$

Der Skizze entnimmt man mit Hilfe des Kosinussatzes den Impuls des Elektrons nach dem Stoß:

$$p^2_{Elektron,1} = p^2_{Photon,0} + p^2_{Photon,1} - 2 \cdot p_{Photon,0} \cdot p_{Photon,1} \cdot \cos\varphi$$

Einsetzen dieser Gleichung in den relativistschen Audruck liefert:

$$E^2_{Elektron,1} - c^2 \cdot (p^2_{Photon,0} + p^2_{Photon,1} - 2 \cdot p_{Photon,0} \cdot p_{Photon,1} \cdot \cos\varphi) = (m_{e,0} \cdot c^2)^2 \quad .$$

Mit $p_{Photon} = \frac{h}{\lambda}$ und $E_{Photon} = \frac{h \cdot c}{\lambda}$ ergibt sich:

$$\left(\frac{h \cdot c}{\lambda_0} - \frac{h \cdot c}{\lambda_1} + m_{e,0} \cdot c^2\right)^2 - \left(\left(\frac{h \cdot c}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{h \cdot c}{\lambda_1}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{h \cdot c}{\lambda_0} \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda_1} \cdot \cos\varphi\right)\right) = (m_{e,0} \cdot c^2)^2 \quad \text{Weiteres}$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$\left(\frac{h \cdot c}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{h \cdot c}{\lambda_1}\right)^2 - \frac{2 \cdot h^2 \cdot c^2}{\lambda_0 \cdot \lambda_1} + \frac{2 \cdot h \cdot c}{\lambda_0} \cdot m_{e,0} \cdot c^2 - \frac{2 \cdot h \cdot c}{\lambda_1} m_{e,0} \cdot c^2 + m^2_{e,0} \cdot c^4 - \left(\frac{h \cdot c}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{h \cdot c}{\lambda_1}\right)^2 + 2 \cdot \frac{h^2 \cdot c^2}{\lambda_0 \cdot \lambda_1} \cdot \cos\varphi = m^2_{e,0} \cdot c^4$$

.

Zusammenfassung der Terme ergibt:

$$-\frac{2 h^2 \cdot c^2}{\lambda_0 \cdot \lambda_1} + \frac{2 \cdot h \cdot c}{\lambda_0} \cdot m_{e,0} \cdot c^2 - \frac{2 \cdot h \cdot c}{\lambda_1} m_{e,0} \cdot c^2 + 2 \cdot \frac{h^2 \cdot c^2}{\lambda_0 \cdot \lambda_1} \cdot \cos\varphi = 0$$

Division durch 2 und weiteres Umformen liefert:

$$\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1}\right) \cdot h \cdot c \cdot m_{e,0} \cdot c^2 + \frac{h^2 \cdot c^2}{\lambda_0 \cdot \lambda_1} \cdot \cos\varphi = \frac{h^2 \cdot c^2}{\lambda_0 \cdot \lambda_1}$$

Erweitern mit dem Produkt der beiden Wellenlängen:

$$(\lambda_1 - \lambda_0) \cdot h \cdot c \cdot m_{e,0} \cdot c^2 + h^2 \cdot c^2 \cdot \cos\varphi = h^2 \cdot c^2 \quad \text{Subtraktion des Kosinusterms liefert:}$$

$$(\lambda_1 - \lambda_0) \cdot h \cdot c \cdot m_{e,0} \cdot c^2 = h^2 \cdot c^2 - h^2 \cdot c^2 \cdot \cos\varphi$$

$$(\lambda_1 - \lambda_0) = \frac{h}{m_{e,0} \cdot c} - \frac{h}{m_{e,0} \cdot c} \cdot \cos\varphi \quad \text{Ausklammern ergibt:}$$

$$(\lambda_1 - \lambda_0) = \frac{h}{m_{e,0} \cdot c} \cdot (1 - \cos\varphi) \quad \text{Damit erhält man die Formel, die Compton hergeleitet hat:}$$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_{e,0} \cdot c} \cdot (1 - \cos\varphi)$$